**CHAPITRE 1 : L’ANNEAU Z**

Z = ensemble des entiers relatifs

Z contient N = ensemble des entiers naturels

N = Z n R+

Propriétés : (V = « pour tout » ; € = « appartient à » ; mettre exposants sur les Z !)

1. L’addition est une loi de composition interne

V(a, b) € Z, a + b € Z

1. L’addition est une loi associative

V(a, b, c) € Z+, a + (b + c) = (a + b) + c

1. 0 est le neutre pour l’addition

V(a) € Z, a + 0 = 0 + a = a

1. Tout entier relatif admet un opposé pour l’addition

V(a) € Z, a + (-a) = (-a) + a = 0

1. L’addition est une loi commutative

V(a, b) € Z, a + b = b + a

(Z, +) est un groupe commutatif ou abélien (Abel)

1. La multiplication est une loi interne

V(a, b) € Z, a \* b € Z

1. La multiplication est une loi associative

V(a, b ,c) € Z, a \* (b \* c) = (a \* b) \* c

1. 1 est le neutre pour la multiplication

V(a) € Z, a \* 1 = 1 \* a = a

1. La multiplication est distributive par rapport à l’addition

V(a, b, c) € Z, a \* (b + c) = a \* b + a \* c

1. La multiplication est commutative

V(a, b) € Z, a \* b = b \* a

(Z, + , \*) est un anneau commutatif

1. Division euclidienne dans N et dans Z (DE)

Theorème : a € Z ; b € Z\*

* Il existe un couple (q, r) € Z tq

a = bq + r

|r| < |b|

* Il existe un unique couple (q, r) € Z tq

a = bq + r

a ≤ r < |b|

Preuve : a > b ; a € N ; b € N\*(EXISTENCE)

E = {q € N, bq ≤ a}

E € N

1 € E car b \* 1 = b < a

E est un ensemble majoré

E(reverse)M € Z, V(q) € E, q ≤ M

E est majoré par a

Il s’agit de vérifier si q est dans E alors q ≤ a

Par l’absurde : q € E ; q > a

ba < bq ≤ a q € E



On divise par a ≥ 1

b < 1

b = 0

Soit q le plus grand élément de E

* q0 € E bq0 ≤ a
* V(q) € E, q ≤ q0

r = a – bq0 ≥ 0

q0 est le plus grand élément de E donc (q0 + 1) €/ E

q0 signifie que

b(q0 + 1) > a

bq0 + b > a = b + rq0

bq0 > rq0

b > r

(UNICITÉ)

a = bq + r et a = bq’ + r’

0 ≤ r < |b| 0 ≤ r’ < |b|

Montrons que q = q’

r = r’

q = q’

bq + r = bq’ + r’

0 - |b| < b(q – q’) = r’ – r < |b| - 0

-|b| < b(q – q’) < |b|

(insérer schéma)

On dit que : a € Z est divisible par b € Z

b divise a (et on note b | a)

a est un multiple de b

Si l’une des propriétés suivantes équivalentes est vérifiée :

1. Z, a = bc
2. a Z = {ak, k € Z} = ensemble de multiplication de a (same avec b)

a Z c b Z

1. le reste de la DE de a par b vaut 0

Propriétés : a, b, c, r, s dans Z

* 1 | a car a = a \* 1

a | a

a | 0 car 0 = 0 \* a

0 | a ssi a = 0

* c | a -> c | ra + sb

c | b

En effet,

a = ck -> ra + sb = rck + scl = c(rk + sl) donc c | ra + sb

b = cl

* a | b - > b = +/- a

b | a

b = ak ab = abkl

a = bl ab(1 – kl) = 0

1er cas : ab =/ 0 donc kl = 1

2e cas : ab = 0 donc k = l = 1 -> b = a ou k = l = -1 -> b = -a

3e cas : a = 0 donc 0 = a | b -> b = 0 -> a = b = 0

1. PPCM et PGCD dans (Z, +, \*)
2. Sous-groupes de (Z, +)

n € Z -> nZ – {nk, k € Z} l’ensemble des multiples de n

1. 0 € nZ (nZ contient le neutre de +)
2. nZ est stable par addition

V(a, b) € nZ \* nZ, a + b € nZ

1. nZ est stable par passage à l’opposé

V(a) € nZ, -a € nZ

On dit que nZ est un sous-groupe de (Z, +)

Théorème :

Si

1. 0 €H
2. H est stable par addition H est un sous-groupe de (Z, +)
3. H est stable par passage à l’opposé

Alors il existe n dans Z tel que h = nZ

Théorème (classification des sous-groupes de (Zn +) :

Soit H un sous-groupe de (Z, +)

1. 0 € H
2. H est stable par addition
3. H est stable par passage à l’opposé

Il existe n € Z, H = nZ = l’ensemble des multiples de n

Premier cas : H = {0} de H = 0Z

Second cas : H =/ {0} (bien sûr, {0} c (=inclus) H)

Fait : Il existe h1 c H, h1 > 0

H =/ {0} donc il existe h0 =/ 0 dans H

1er cas h0 > 0 h1 = h0

2e cas h0 < 0 h1 = -h0 € H à cause de 3) > 0

H n N\* = l’ensemble des éléments de H > 0

c N\*

minoré par 0

soit n = minimum de H n N\*

Mq H = nZ

Procédons par double inclusion

Bien entendu, nZ c H grâce à 2)

Mq H c nZ

Soit h dans H

Mq h € nZ

Mq le reste de la DE de h par n vaut 0

h = nq + r

0 <= r < |n| = n

Mq r = 0

r = h – nq € H => r = 0

€ H € H car n € H et 2)

€ H par 3)

1. PPCM dans Z
2. Exemple

4 Z n 6 Z = l’ensemble des entiers qui sont à la fois un multiple de 4 et de 6

= 12 Z

On dit que 12 est le plus petit commun multiple de 4 et de 6

1. Généralisation

Soient a et b dans Z

H = aZ n bZ

H satisfait la propriété 1), 2) et 3)

donc H est un sous-groupe de (Z, +)

donc il existe un unique m € N, H = mZ

Cet entier m s’appelle le plus petit commun multiple de a et de b. On le not

m = PPCM(a, b) (version fr) = a v b (version en)

aZ n bZ = PPCM(a, b) Z

1. Propriétés aZ n bZ = mZ a, b dans Z m = PPCM(a, b)

* a | m et b | m car mZ c aZ

mZ c bZ

* Vc € Z, a | c et b | c => m | c

Rappel : kZ c lZ ⬄ l | k

a | c => cZ c aZ => cZ c aZ n bZ = mZ => m | c

b | c => cZ c bZ

* PPCM(0, a) = 0 car 0Z n aZ = 0Z
* PPCM(ca, cb) = |c] PPCM(a, b)
* PPCM(a, b) = PPCM(-a, -b)

Soient a et b dans Z

H = aZ + bZ = {ar + bs, (r, s) € Z²}

1. 0 € H car 0 = a \* 0 + b \* 0
2. h1 = ar1 + bs1 € H => h1 + h2 = a(r1 + r2) + b(s1 + s2)

h2 = ar2 + bs2 € H

1. h = ar + bs H => -ar – bs € H

H = dZ où d >= 0

Cet entier d s’appelle le plus grand diviseur commun de a et de b. On le note

d = PGCD(a, b) = a ^ b

aZ + bZ = PGCD(a, b) Z

* d | a et d | b car aZ c aZ + bZ = dZ
* Vc € Z, c | a => aZ + bZ c ?

c | b

RECOPIER LES POINTS PRECEDENTS JUSQU’AU 5e POINT

* On dit que a et b sont premiers entre eux si les seuls diviseurs communs à a et b sont +- 1

c | a => c = +- 1

c | b

1. a et b sont premiers entre eux
2. PGCD(a, b) = 1
3. Il existe (r, s) € Z², ar + bs = 1

i) => ii)

PGCD(a, b) est un diviseur de a et de b donc PGCD (a, b) = +- 1

Donc PGCD(a, b) = 1

ii) => i)  
soit c un diviseur de a et de b c |a => c | PGCD(a, b) = 1

c | b => c +- 1

ii) => iii)

aZ + bZ = PGCD(a, b) Z = Z

Il existe r et s dans Z, ar + bs = 1

iii) => i)

Soit c un diviseur commun de a et de b

Mq c = +- 1

ar + bs = 1

c | membre de gauche donc c | 1 c = +- 1

1. Propriétés arithmétiques
2. Lemme de Gaus

a, b , c dans Z

c | ab => c | b

c |/ a

FAUX

c | ab => c | b

PGCD(a, b) = 1

1. Lemme d’Euclide

Un entier relatif p est un nombre premier si les seuls diviseurs de p sont +- 1, +- p

c | p => c = +- 1 ou c = +- p

p | ab => p | a ou p | b

p premier

Preuve

1er cas : p | a 0k

2e cas : p |/ a Mq p | b

Selon le lemme de Gaus, il suffit de mq PGCD(a, p) = 1

Soit f un diviseur commun de a et de p

Mq s = +- 1

f divise le nombre premier p donc f = +- 1

1. a, b, c dans Z

a | c => ab | c

b | c FAUX

a | c => ab | c

b | c

PGCD(a, b) = 1

Corollaire : PPCM(a, b) x PGCD(a, b) = |ab]

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Algorithme d’Euclide a, b dans Z

* calcul explicite de PGCD(a, b) et donc de PPCM(a, b) = |ab| / PGCD(a, b)
* identité de Bezout

r, s dans Z, ar + bs = PGCD(a, b)

* résolution d’équation diophantiennes (Diophante)

Exemple :

PGCD(30, 252)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 252 | 30 | 12 | 6 |  |  |  |  |  |  |
| 12 | 6 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |

252 = 30 \* 8 + 12

30 = 12 \* 2 + 6

12 = 6 \* 2 + 0

* PGCD(30, 252) = 6

PPCM(30, 252) = (30 \* 252) / 6

* Identité de Bezout

On cherche r et s

30r + 252s = 6

12 = 252 – 30 \* 8

6 = 30 – 12 \* 2

6 = 30 – 12 \* 2 = 30 – (252 – 30 \* 8) \* 2 = 30 \* 17 + 252 \* (-2)

* Résoudre dans Z²

30x + 252y = 6

P(x, y) = 0 où P(X, Y) = 30X + 252Y – 6

Algo d’Euclide : (17, -2) est une solution de 30x + 252y = 6

30x + 252y = 6 (1)

30 \* 17 + 252 \* (-2) = 6 (2)

(1) – (2)

30(x – 17) + 252(y + 2) = 0

30(x – 17) = -252(y + 2)

5(x – 17) = -42(y + 2)

5 | 5(x – 17) donc

5 | -42(y + 2) => 5 | y + 2 (Lemme de Gaus)

PGCD(5, -42) = 1

Il existe k dans Z,

y + 2 = 5k

y = 5k - 2

Remarque : a, b dans Z

d = PGCD(a, b)

a = da’ avec PGCD(a’, b’) = 1

b = db’

42 | -42(y + 2) donc 42 | 5(x – 17)

PGCD(42, 5) = 1

Donc (lemme de Gaus)

42 | x – 17

Il existe l dans Z tq

x -17 = 42l

x = 17 + 42l

30x + 252y = 6

30(17 + 42l) + 252(5k-2) = 6

30 \* 17 + 252 \* (-2) + 30 \* 42l + 252 \* 5k = 6

30 \* 42l = -5 \* 252k

6 \* 5 \* 42l = -5 \* 6 \* 42k

l = -k

Bilan : Les solution de 30x + 252y = 6 sont (17 – 42k, 5k – 2) où k € Z  
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Les congruences dans Z
2. Définition :

On dit que a est congrue à b modulo n si l’une des propriétés suivantes équivalentes est vérifiée :

1. a – b € nZ (a – b est un multiple de n)
2. n | a – b
3. il existe k € Z, a = b + nk (a = b à un multiple de n près)

dans ce cas on note a ≡ b[n]

Propriétés :

* relativité de la congruence modulo n

V a € Z, a ≡ a[n]

* symétrie de la congruence modulo n

V (a, b) € Z², a ≡ b[n] => b ≡ a[n]

* transitivité de la congruence modulo n

V (a, b, c) € Z3, a ≡ b[n] et b ≡ a[n] => a = c[n]

On dit que la congruence modulo n est une relation d’équivalence sur Z.

La classe de congruence modulo n d’un entier relatif a est Cl(a) = {b € Z, b ≡ a[n]}

= {b € Z, il existe k Z, b = a + nk}

= {a + nk, k € Z}

Cl(a) = {a + nk, k € Z} = a + nZ

=: a--- (barre sur le « a »)

Cl(a) est un sous-ensemble de l’ensemble des entiers relatifs

P (pour parties (calligraphique btw))(Z) = {A, A c Z}

«  un élément de P(Z) est un sous-ensemble de Z »

Ex : O/ c Z ⬄ O/ € P(Z)

Z c Z ⬄ Z € P(Z) etc…

Exemple n = 3

0--- = 0 + 3Z = 3Z c Z donc O--- € P(Z)

1--- = 1 + 3Z c Z donc …

2--- = 2 + 3Z c Z donc …

3--- = {3 + 3k, k € Z} = {3(1 + k), k € Z} = {3l, l € Z} = 3Z = 0---

-1--- = {b € Z, b ≡ -1[3]} = {b € Z, il existe k € Z, b = -1 + 3k} = {-1 + 3k, k € Z} = {2 + 3(k – 1), k € Z} = 2--- =

-1 = 2 – 3 = {2 + 3l, l € Z} = 2---

Z / nZ = l’ensemble des classes de congruence modulo n

= {a---, a € Z} € P(Z)

1. Description de Z / nZ
2. n = 0

La congruence modulo 0, c’est l’égalité a ≡ b[0] s’il existe k € Z, a = b + 0 \* k

a = b

a--- = {b € Z, b ≡ a[0]} = {a}

Z / 0Z = {a---, a € Z} = {{a}, a € Z}

Z / 0Z est en « bijection » avec Z

1. n = 1

a ≡ b[1] s’il existe k € Z, a = b + 1 \* k

a – b = k

a ≡ b[1] si a – b € Z est toujours vrai !

1. n >= 2

Proposition a, b dans Z

a ≡ b[n] ssi a et b ont le même reste positif dans leur division euclidienne par n

<=

{a = nq + r

{0 <= r < n

{q € Z

{{b = nq’ + r

{{0 <= r < n

{{q’ € Z

a – b = (nq + r) – (nq’ + r) = n(q – q’) donc a ≡ b[n]

=> on suppose que a ≡ b[n]

DE de a par n

a = nq + r où q € Z 0 <= r < n

DE de b par n

b = nq’ + r’ où q’ € Z 0 <= r’ < n\*

Mq r = r’

r – r’ = (a – nq) – (b – nq’) = (a – b) – n(q – q’)

Ainsi, r – r’ est un multiple de n

?????? (lourd rompiche)

En effet, il y a autant de classe de congruence modulo n possible que de reste positif dans une DE par n

Ex :

Z / 4Z = {0---, 1---, 2---, 3---} = {1---, 2---, 3---, 4---}

????? (rompiche éternel)

1. Additionner 2 éléments de Z / nZ

Définition :

Soient X et Y dans Z / nZ

X + Y = P

Il existe x dans Z, X = x---

Il existe y dans Z, Y = y--- y est un représentant de Y

X + Y = (x--- + y---)

ATTENTION : Il ne faudrait pas que X + Y du choix des représentants x et y

X = x--- + x’---

Y = y--- = y’---

Mq x--- + y--- = x’--- + y’---

x--- = x’--- signifie que x ≡ x’[n]

il existe k € Z, x = x’ + kn

y--- = y’--- signifie que y ≡ y’[n]

il existe l € Z, y = y’ + ln

Ainsi, x + y = x’ + y’ + (k + l)n

1. Multiplier deux éléments de Z / nZ

X \* Y = x--- \* y---

(Z / nZ, +, \*) est un anneau commutatif unitaire

+, \* dans Z / nZ +, \* dans Z

0--- + a--- = a--- + 0--- = a--- 0--- + a--- = 0 + a------ (comprend tout) = a---

Rappel :

X et Y dans Z/nZ

X = k--- k € Z

Y = l--- l € Z

X + Y = k--- + l--- := k + l

X \* Y = k--- \* l--- := k \* l

a, b, c dans Z

* a--- + 0--- = 0--- + a--- = a---

0 est le neutre pour l’addition

* a--- + (b--- + c---) = (a--- + b---) + c---

(Z/nZ, +) est un groupe commutatif

* a--- + (-a) = (-a) + a = 0---



L’opposé de a--- et -a

cad -a--- = -a

* a--- + b--- = b--- + a---

En effet

* a--- + 0--- = a + 0 = a---
* a--- + (b--- + c---) = a--- + b + c = (a + b) + c--- = a + b + c--- = (a--- + b---) + c---
* a--- + (-a) = a + (-a) = 0---

(Z/nZ, +, \*) est un

anneau commutatif

unitaire

* a--- + b--- = a + b = b + a = b--- + a---
* a--- \* (b--- \* c---) = (a--- \* b---) \* c---
* a--- \* 1--- = 1--- \* a--- = a---



1--- est l’élément identité de Z/nZ

* a--- \* (b--- + c---) = a--- \* b--- + a--- \* c---
* a--- \* b--- = b--- \* c---

Proposition :

k € Z l € Z

lk--- = lk

En effet, l > 0

lk--- = k--- + k--- + … + k--- ( l fois) = k + k + k + k ( l fois) = lk

Proposition : k € Z

Il existe un plus petit entier naturel non nul r tq :

rk--- = 0---

Cet entier r s’appelle l’ordre de k--- dans (Z/nZ, +)

Exemple :

Dans (Z/6Z, +)

1 \* 1--- = 1--- =/ 0---

2 \* 1--- = 1--- + 1--- = 2--- =/ 0---

3 \* 1--- = 2 \* 1--- + 1--- = 2--- + 1--- = 3--- =/ 0---

4 \* 1--- = 3 \* 1--- + 1--- = 3--- + 1--- = 4--- =/ 0---

5 \* 1--- = … = 5--- =/ 0---

6 \* 1--- = … = 6--- = 0---

Bilan : L’ordre de 1--- dans (Z/6Z, +) vaut 6

2--- =/ 0---

2 \* 2--- = 2--- + 2--- = 4--- =/ 0---

3\*2--- = 2 \* 2--- + 2--- = 4--- + 2--- = 6--- = 0---

Bilan : L’ordre de 2—dans (Z/6Z, +) vaut 3

Théorème de Lagrange : Dans (Z/nZ, +), l’ordre d’un élément divise n.

**CHAPITRE 2 : NOMBRES RÉELS ET SUITES DE NOMBRES RÉELS**

N c Z c Q c R c C

Commentaires pour :

N -> x + 2 = 0 n’a pas de solution dans N

Z -> x + 2 = 0 a une solution dans Z

-> l’équation 2x = 1 n’a pas de solution

Q -> l’équation 2x = 1 admet une solution

-> il existe des suites de nombres rationnels qui devraient converger mais qui ne convergent pas dans Q

R -> 2 + 1 = 0 n’a pas de solution dans R

1. Développement décimal des rationnels

Définition :

Q = {a / b, a € Z, b € N\*}

Il n’y a pas unicité de la fraction rationnelle, 1 / 2 = 5 / 10

Parmi toutes les fractions rationnelles définissant le même nombre rationnel, il existe une et une seule dite irréductible

x = a / b

a € Z

b € N\*

a et b premiers entre eux

Un nombre décimal est un nombre rationnel dont la fraction irréductible qui le représente est de la forme a / 10n a € Z, n € N

D = ensemble de nombres décimaux D c Q

Théorème : x = a / b a € Z, b € N\*

Il existe une unique suite (an)n € N vérifiant

1. a0 € Z
2. V n € N\*, an € {0, 1, …, 9}
3. V n € N

a0 + a1 / 10 + a2 / 10² + … + an / 10n <= x < a0 + a1 / 10 + a2 / 10² + … + an / 10n + 1 / 10n

La suite (an)n € N s’appelle le développement décimal du nombre rationnel x  
On note x = a0, a1a2a3…

0 <= x – < 1 / 10n

A COMPLETER JUI TRO CON

Aucune idée de si ça va là ou pas mais leggo ->  
Dans l’ACU (R, +, \*),  
tous les réels non-nuls sont inversibles, c’est-à-dire qu’il existe y tq xy = 1

Ceci est faux dans (Z/nZ, +, \*)

Ex :  
n = 4 Z/4Z

2--- =/ 0---  
2--- n’est pas inversible car sinon il existerait l--- dans Z/4Z,  
2--- \* l--- = 1---  
2--- \* 2--- \* l--- = 2--- \* 1---  
 4--- = 0--- 2---**0--- =/ 2---**

1. k--- est inversible dans Z/nZ  
   il existe l--- € Z/nZ, k--- \* l--- = 1---
2. k et n sont premiers entre eux

Ex : 2--- n’est pas inversible dans Z/4Z car 2 et 4 ne sont pas premiers entre eux

i) => ii)  
Il existe l--- € Z/nZ, k--- \* l--- = 1---  
kl = 1---  
kl ≡ 1[n]  
Il existe v € Z, kl – 1 = vn  
kl – vn = 1  
BEZOUT

ii) => i)  
Il existe (u, v) € Z², uk + vn = 1  
Donc Z/nZ, on a  
1--- = uk + vn = uk + vn = u---k--- + v---n--- = u---k---

RQ  
(R, +) groupe  
(R, \*) PAS un groupe  
(R\*, \*) est un groupe  
(Z/nZ, +) groupe  
(Z/nZ, \*) PAS un groupe  
({k---, PGCD(k, n) = 1}, \*) groupe

Notion de suite convergente

Définition

On dit qu’une suite u = (un)n € N converge vers un nombre réel l si pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe N dans N (grand N le 2e) tq  
 V n € N, n >= N, un € I

x € R, x = a0, a1, a2…

xn = a0, a1, a2, a3, … , an

Proposition :

La suite (xn) est une suite croissante qui converge vers x.

Preuve :

Soit I = ]y, z[, un intervalle ouvert contenant x  
y < x < z

y = b0, b1, b2, b3 …  
z = c0, c1, c2, c3 …

p = le plus petit entier naturel avec bp < ap  
q = le plus petit entier naturel avec aq < cq  
N = max(p, q)

Pour n >= N, on a y < xn < z  
Pour n >= N, xn € I

(n+1)e chiffre du developpement décimal de x

Pour n >= 0,  
 xn+1 – xn = an + 1 / 10n+1 = 0,00000… an+1000…  
 >= 0



Le théorème de la limite monotone (TLM)

Soit u = (un), une suite de nombres réels.  
si :

* u est croissante ie V n € N, un <= un+1
* u est majorée ie il existe M € R, V n € N, un < M

Alors la suite u converge vers un nombre réel l <= M.

Corollaire :

Soit u = (un) une suite de nombres réels  
si :

* u est décroissante ie V n € N, un+1 <= un
* u est minorée ie il existe m € R, V n € N, un >= m

Alors la suite u converge vers un nombre réel l >= m.

Preuve du corollaire :

U = -u = (-un) est croissante majorée par -m  
car u est décroissante minorée par m

Donc U converge vers l <= -m  
Donc u converge vers -l >= m

Preuve du TLM :

Développement décimal de un = (n+1)e terme de la suite u

un = a0,n, a1,n a2,n a3,n

(a0,n) est une suite d’entiers relatifs croissante et majorée  
Cette suite stationne  
a0,n = a0 pour n assez grand

(a1,n) est une suite de {0, … , 9} croissante donc elle stationne  
a1,n = a1 € {0, … , 9} pour n assez grand

Addition dans R

(xn) croissante et majorée  
(yn) croissante et majorée

Donc (xn + yn) est croissante et majorée

TLM (xn + yn) converge vers une limite l

Par def : l = x + y

X et y dans R+  
x = a0, a1a2a3…an -> = xn (xn)n>=0 converge vers x en croissant  
y = b0, b1b2b3…bn -> = yn (yn)x>=0 converge vers y en croissant

Def de x + y

(xn + yn)x>=0 est une suite croissante car (xn+1 + yn+1) – (xn+1 – xn) + (yn+1 – yn) >= 0  
 majorée car xn + yn <= x + y

Donc elle converge vers une limite que l’on note x + y

Def de xy

(xn \* yn)x>=0 est une suite majorée car xnyn <= xy  
 croissante car xn+1yn+1 – xxyn = xn+1(yn+1 – yn) + xn+1yn - xnyn (= (xn+1 – xn)yn ) >= 0

Donc (TLM), elle converge vers une limite notée xy

3) Suite de nombres réels

u = (un)n>=0 suite de nombres réels

Def : On dit que la suite u converge s’il existe un nombre réel l tq  
 V e (= lettre grecque cringe aka Epsilon) > 0, il existe Ne € N(grand ensemble ici), V n € N, (n >= Ne => |un – l| < e)

Rappel valeur absolue :  
Exemple :   
{x € R, |x - 3| <= 2} est l’ensemble des nombres réels à une distance inférieure à 2 du nombre réel 3

On a toujours x <= |x|

Inégalité triangulaire  
V (x, y) € R², |x + y| <= |x| + |y| Permet de majorer la valeur absolue d’une somme.

Corollaire  
V (x, y) € R², ||x| - |y|| <= |x – y| Permet de minorer la valeur absolue d’une somme

Retour à la def de la convergence de u :  
e = rayon d’un intervalle autour de l  
Ne = temps qu’il faut attendre pour que la suite rentre dans l’intervalle et n’en sorte plus

Exemples :

* La suite u constante de valeur c converge vers c.  
  Soit e > 0 fixé  
  On cherche n >= Ne => |un – c| < e  
  On remarque que |un – c| = 0 pour tout entier n  
  Donc V n >= 0, |un – c| = 0 < e  
  Ainsi, Ne = 0 convient.

Rappel : Partie entière  
x € R -> Il existe un unique entier relatif k vérifiant k <= x <= k + 1  
On le note E(x) = [x] =

E : R --> Z  
 x --> E(x)

* Pour n >= 0, un = (2n² + 1)/(n² + 2) = (2n²(1 + 1/2n²))/(n²(1 + 2/n²))  
  = 2 \* ((1 + 1/2n²)/(1 + 2/n²)) ------> 2 par le théorème opératoire sur les suites convergentes

n -> +∞

Montrer que u converge vers 2  
Soit e > 0 fixé  
On cherche un entier Ne vérifiant n >= Ne, |un – 2| <= e  
(flemme)  
On remarque que Ne = E(√(3/e)) + 1 convient  
En effet, pour n >= Ne, |un – 2| = 3/(n² + 2) <= 3/(Ne² + 0) = 3/Ne² <= 3/√(3/e)² = e  
Donc Ne >= √(3/e)

? <= a/b <= ? a, b > 0  
Pour majorer a/b, on majore a ie a <= A  
 on minore b ie b >= B > 0  
et on en déduit que a/b <= A/B  
  
Pour majorer a/b, on minore a ie a >= A > 0  
 on majore b ie b <= B  
et on en déduit que a/b >= A/B

Proposition (Unicité de la limite)  
Si une suite converge vers deux nombres réels l et l’  
Alors l = l’  
  
Notation : si u converge vers l alors on écrit limn -> +∞ un = l

Preuve :  
Par l’absurde e = |l – l’|/4 > 0

Comme u converge vers l, il existe N1,e € N, n >= N1,e => |un – l| <= e  
Comme u converge vers l’, il existe N2,e € N, n >= N2,e => |un – l’| <= e  
……….ATCHOUM………………  
Ainsi 0 <= (1/2)|l – l’| <= 0

PAPOSSIBL

u = (un)n € N converge si Ǝ l € R, V e > 0, Ǝ Ne € N, V n € N, (n >= Ne => |un – l| <= e)  
u diverge si V l € R, Ǝ e > 0, V Ne € N, Ǝ n € N, (n >= N et |un – l| > e)

Autrement dit, u diverge signifie que pour tout nombre réel l, on peut trouver un intervalle fermé   
[l – e, l + e], {u € N, un €/ [l – e, l + e]} soit infini

Exemples :

* un = n est une suite divergente  
  Soit l dans R  
    
  1er cas : l > 0 => l + 1 < 1  
  l + 1 < 1 <= n = un pour n € N\*  
  N\* c {n € N, un €/ [l – 1, l + 1]}  
    
  2e cas : l >= 0  
  Pour n > l + 1, un €/ [l – 1, l + 1]
* un = (-1)n est une suite divergente  
  Soit l dans R  
    
  1er cas : l = -1  
  2N c {n € N, un €/ [-1 – 1, -1 + 1]}  
    
  2e cas : l = 1  
  2N + 1 c {n € N, un €/ [1 – 1, 1 + 1]}  
    
  3e cas : l =/ ±1  
  |l – 1| : distance entre l et 1  
  |l + 1| = |l – (-1)| : distance entre l et -1  
    
  Soit e = ½ min(|l – 1|, |l + 1|) > 0  
  N c {n € N, un €/ [l – e, l + e]}

Propriétés des suites convergentes

Proposition :  
Une suite convergente est bornée  
si u = (un)n € N converge, alors Ǝ M € R, V n € N, |un| <= M

Preuve :  
Soit l la limite de u  
Soit e = 1 > 0  
Ǝ N1 € N, V n € N, (n >= N1 => |un – l| <= 1)  
  
Pour n >= N1  
|un| - |l| <= |un – l| <= 1  
|un| <= 1 + |l|  
Ainsi pour n dans N,  
|un| <= max(1 + |l|, |u0|, |u1|, …, |uN1-1|) = M  
En effet,  
n = 0 |u0|<= M donc n = 1 |u1| <= M donc n = N1 – 1 |uN1-1| <= M donc n >= N1 |un| <= 1 + |l| <= M

Proposition (Théorème opératoire sur les suites convergentes) :

Limn->∞ un = u € R et limn->∞ vn = v € R λ, µ dans R

1. la suite (un + vn) converge vers u + v
2. la suite (unvn) converge vers uv
3. la suite (λun + µvn) converge vers λun + µvn
4. si u =/ 0 alors la suite (1/un) converge vers 1/u

1) et 2) => 3)

4) vn = 1 suffit  
vn/un = vn \* 1/un donc ------> v \* 1/u = v/u

1) soit e > 0  
On cherche Ne vérifiant pour n >= Ne, |(un + vn)| <= e  
Pour n dans N, |(un + vn)| = |(un – u) + (vn – v)| <= |un – u| + |vn – v|  
  
Il existe N1,e, n >= N1,e, |un – u| <= e/2 (1)  
Il existe N2,e, n >= N2,e, |vn – v| <= e/2 (2)  
  
Pour n >= Ne = max(N1,e, N2,e), |(un + vn) – (u + v)| <= e/2 + e/2 = 2e/2 = e  
  
(2) unvn – uv = (un – u)vn + uvn – uv = (un – u)vn + u(vn – v)  
|unvn – uv| <= |vn||un – u| + |u||vn – v| <= M|un – u| + |u||vn – v|  
  
Il existe N1,e, n >= N1,e, |un – u| <= e/2M (1)  
Il existe N2,e, n >= N2,e, |vn – v| <= e/2(|u| + 1) (2)  
  
Pour n >= Ne = max(N1,e, N2,e), |(unvn) – (uv)| <= e/2M + e/2 = 2e/2(|u| + 1)  
= e/2 + |u|/(|u| + 1) <= e/2 + e/2 = e

limn->∞ un = u =/ 0 => limn->∞ 1/un = 1/u  
  
Lemme  
Ǝ N0 € N, V n >= N0, |un| >= |u|/2  
  
Par exemple, u > 0  
  
V e > 0, Ǝ Ne € N, V n € N, n >= Ne => |un – u| <= e  
 un € [u – e, u + e]  
e = u/2 > 0  
Ǝ Nu € N, V n € N, un € [u/2, 3u/2]  
 un >= u/2 > 0  
  
Soit e > 0  
Je cherche Ne € N, |1/un – 1/u| <= e pour n >= NePour n >= N0, 1/un – 1/u = (u – un)/uun  
|1/un – 1/u| = |un – u|/|u||un|  
 < |un – u|/(|u||u|/2)  
 = (2/|u|²)|un – u|  
Ǝ Me € N, V n € N, n >= Me, |un – u| <= e \* |u|²/2  
Ainsi, pour n >= max(N0, Me) = Ne, on a |1/un – 1/u| <= 2/|u|² \* e \* |u|²/2 = e

ELLIPSE TEMPORELLE PFIOUUUU

Passage à la limite dans les inégalités

un --> u € R  
vn --> v € R

* si V n € N, un <= vn alors u <= v (1)
* si V n € N, un < vn alors u <= v (2)

Preuve

(1) => (2)  
Il suffit de démontrer (1) par contraposition  
  
Supposons que u > v  
Montrons qu’il existe N dans N, uN > vN  
  
N = max(N1, N2)  
uN € [u – e, u + e] -> uN >= u – e = u – (u – v)/4 = (3u + v)/4  
vN € [v – e, v + e] -> vN <= v + e = v + (u – v)/4 = (u + 3v)/4  
  
A-t-on (u + 3v)/4 < (3u + v)/4 ?  
2v < 2u ?  
v < u ? OUI  
  
Bilan :  
vN <= (u + 3v)/4 < (3u + v)/4 <= uN  
vN < uN

Théorème d’encadrement

un --> l € R---  
wn --> l € R---  
un <= vn <= wn  
Alors vn --> l  
  
1er cas : l € R  
Soit e > 0 fixé  
On cherche Ne tq n >= Ne => un € [l – e, l + e]  
  
Il existe N1,e € N,  
n >= N1,e => un € [l – e, l + e]  
Il existe N2,e € N,  
n >= N2,e => wn € [l – e, l + e]  
  
Pour n >= max(N1,e, N2,e) = Ne, Vn € [un, wn] c [l – e, l + e]  
  
2e cas : l = +∞  
Soit A dans R+\*  
On cherche NA € N tq n >= NA, vn € [A, +∞[  
  
Il existe N1,A € N,  
n >= N1,A => un € [A, +∞]  
Il existe N2,A € N,  
n >= N2,A => wn € [A, +∞]  
  
Pour n >= max(N1,A, N2,A) = NA, Vn € [un, wn] c [A, +∞]

Théorème des suites adjacentes

(un)n € N et (vn)n € N adjacentes  
Ces deux suites convergent vers la même limite réelle  
  
Montrons que un --> +∞  
  
Par l’absurde : un --> +∞  
vn = (vn – un) + un --> 0 + +∞ = +∞  
vn décroissante CONTRADICTION  
  
un --> +∞ => un converge vers u € R (TLM)  
un croissante  
  
Montrons que vn --> -∞  
  
Par l’absurde : vn --> -∞  
un = (un – vn) + vn --> 0 + -∞ = -∞  
un croissante CONTRADICTION  
  
vn --> -∞ => vn converge vers v € R (TLM)  
vn décroissante  
  
Mq u = v  
vn – un --> 0  
 --> v – u  
  
Résultat admis  
u = (un)n € N   
vn = u2n (pair)  
wn = u2n+1 (impair)  
  
(i) un --> l  
(ii) vn --> l et wn --> l  
  
un = (-1)n diverge  
u2n = 1 converge  
u2n+1 = -1 diverge

